Analyse des connaissances des enseignants pour soutenir les élèves dans la résolution de problèmes mathématiques

Ouafaa BOUFTOUH[1], Ahmed DELBOUH[2]
1 Laboratoire d'équations aux dérivées partielles, d'algèbre et de géométrie spectrale, Département de mathématiques, Faculté des sciences, Université Ibn Tofail, BP 133 Kénitra, Maroc

Email: ouafaa.bouftouh@uit.ac.ma

2 ERF-MaTEIA Centre Régional de sMétiers de l'éducation de Métiers de l'éducation et de la Formation Dakhla Oued Eddahab

***Résumé** : Cette recherche vise l'identification des connaissances que possèdent les enseignants du secondaire et qui leur permettent d'accompagner les élèves dans la démarche de résolution de problèmes mathématiques. Les enseignants participant à cette étude ont renseigné un questionnaire exploratoire. Notre cadre théorique est ancré dans le cadre de Shulman, (1986) et celui de Ball et al. (2008), qui convoquent les connaissances des enseignants pour soutenir les élèves dans la résolution de problèmes. Les résultats montrent que les enseignants privilégient les savoirs procéduraux au détriment d'un travail analytique profond et que les élèves rencontrent des difficultés dans la maîtrise d'un ensemble de concepts dont la signification est forgée à travers une variété de situations. Ce qui nécessite d'adapter les stratégies d'enseignement et à proposer des interventions ciblées à travers une formation continue des enseignants, afin de soutenir réellement la compétence de résolution de problèmes mathématiques chez les élèves.*
***Mots-clés** : Résolution de problèmes, connaissances pour enseigner, activité mathématiques, optimisation, fonction.*

Analysis of Teachers' Knowledge to Support Students in Mathematical Problem Solving"résolution de problèmes mathématiques

Abstract
This research aims to identify the knowledge possessed by secondary school teachers that enables them to support students in mathematical problem-solving. The participating teachers completed an exploratory questionnaire. The theoretical framework is based on Shulman (1986) and Ball et al. (2008), which emphasize the importance of teachers' knowledge in effectively guiding students through problem-solving.
The results show that teachers tend to prioritize procedural knowledge over deep analytical work, leading students to struggle with mastering certain concepts whose meaning is developed through a variety of situations. These findings highlight the need to adapt teaching strategies and provide targeted interventions through continuous teacher training, in order to truly foster students' problem-solving skills in mathematics.

Keywords: Problem solving, knowledge for teaching, mathematical activity, optimization, function.

1. Introduction

Le système éducatif marocain, à l'instar de nombreux systèmes éducatifs mondiaux, a intégré la résolution de problèmes comme un pilier central de l'enseignement des mathématiques, CSEFRS, (2015). Les orientations pédagogiques insistent sur le fait que les mathématiques ne doivent pas être perçues comme une simple accumulation de connaissances et de procédures, mais plutôt comme un outil pour comprendre et résoudre des situations complexes, Benjelloun, (2019). Cependant, des études et des observations de terrain révèlent que les élèves marocains du secondaire rencontrent souvent des difficultés significatives dans la résolution de problèmes, se limitant parfois à l'application mécanique d'algorithmes sans une compréhension profonde du problème posé, Ouazzani, (2020). Ces difficultés peuvent être attribuées à plusieurs facteurs, notamment des lacunes dans la compréhension des énoncés, un manque de stratégies de résolution, ou encore une faible capacité à transférer les connaissances acquises à de nouvelles situations, Schoenfeld, (1992) du côté des enseignants, soulignons leur rôle central dans le processus d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. Cependant, des défis persistent concernant la formation initiale et continue des enseignants en didactique de la résolution de problèmes, ainsi que la disponibilité de ressources pédagogiques adaptées. Cette réalité montre qu'il y a un fossé entre les attentes en matière de résolution de problèmes et les performances réelles des élèves. Ainsi que de la mise en évidence de la question de savoir comment les connaissances des enseignants influencent la capacité des élèves à conceptualiser et à résoudre des problèmes. Notre question de recherche principale est la suivante: Comment les connaissances spécifiques des enseignants en didactique des mathématiques et en contenu mathématique influencent-elles leur capacité à soutenir et à développer la démarche de résolution de problèmes mathématiques chez les élèves du secondaire ?

Nous émettons l'hypothèse que les enseignants de mathématiques du secondaire possédant une connaissance approfondie et intégrée du contenu mathématique (CK), de la pédagogie du contenu (PCK), et des connaissances des élèves (KCS) seront plus aptes à identifier les difficultés des élèves, à adapter leurs stratégies d'enseignement et à proposer des interventions ciblées pour améliorer les compétences de résolution de problèmes mathématiques de leurs élèves. Inversement, des lacunes dans ces domaines de connaissances pourraient limiter leur efficacité.

La littérature abonde sur l'importance des connaissances des enseignants et sur la résolution de problèmes. Cependant, la manière spécifique dont les différentes facettes des connaissances des enseignants influencent directement et mesurablement le développement du niveau de conceptualisation des élèves dans le contexte de la résolution de problèmes est un domaine qui mérite une exploration plus approfondie. Il est crucial de comprendre comment les enseignants utilisent leurs connaissances pour soutenir et développer cette conceptualisation, et non pas seulement pour transmettre des connaissances procédurales. Cette question met en évidence que la qualité de l'enseignement des mathématiques et, par conséquent, le développement de la démarche de résolution de problème, dépendent intrinsèquement de la synergie entre les connaissances disciplinaires et didactiques des enseignants. Négliger l'une ou l'autre de ces dimensions reviendrait à limiter considérablement l'efficacité des interventions didactique et la profondeur de l'apprentissage des élèves.

2. Cadre théorique et conceptuel

2.1. Connaissances des enseignants ou connaissances pour enseigner

Le concept « connaissances des enseignants ou connaissances pour enseigner » englobe plusieurs dimensions. Shulman (1986) a introduit la distinction entre la connaissance du contenu (CK), la connaissance pédagogique du contenu (PCK), et la connaissance curriculaire, entre autres. Pour notre sujet, la PCK est particulièrement pertinente, car elle concerne la manière dont les enseignants transforment leur connaissance disciplinaire pour la rendre compréhensible aux élèves. Ball, Thames, et Phelps (2008) ont affiné cette notion en proposant le cadre de la connaissance mathématique pour l'enseignement (MKT), qui inclut la connaissance commune du contenu (CCK), la connaissance spécialisée du contenu (SCK), la connaissance du contenu et des élèves (KCS), et la connaissance du contenu et de l'enseignement (KCT).
L'identification de leurs connaissances pertinentes s'appuie sur le cadre des connaissances professionnelles des enseignants, notamment les connaissances du contenu (CK), les connaissances pédagogiques (PK) et les connaissances pédagogiques du contenu (PCK). Les connaissances des enseignants sont fondamentales pour accompagner les élèves dans leur processus de conceptualisation.

Types de connaissances	*Critères*	*Indicateurs et descriptions*
Connaissance du Contenu Mathématique (CCM) / Subject Matter Knowledge (SMK)	Connaissance commune du contenu (Common Content Knowledge - CCK)	Il s'agit de la connaissance des faits, des concepts, des procédures et des algorithmes mathématiques que tout individu ayant un bon niveau en mathématiques devrait posséder. Pour votre recherche, il est crucial de sonder la profondeur et la précision de cette connaissance chez les enseignants. Par exemple, comment définissent-ils un concept comme la proportionnalité ? Quelles sont les différentes méthodes pour résoudre une équation du second degré ? Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005)
	Connaissance spécialisée du contenu (Specialized Content Knowledge - SCK)	Cette connaissance est propre à l'enseignement des mathématiques. Elle inclut la capacité à décomposer des concepts complexes, à identifier les erreurs typiques des élèves, à comprendre les différentes représentations d'un même concept (algébrique, graphique, numérique) et à savoir pourquoi une méthode fonctionne ou non. Par

		exemple, un enseignant doit savoir pourquoi la division par zéro est indéfinie, au-delà de la simple mémorisation de la règle. Il doit également comprendre les liens entre différents domaines mathématiques. 2. Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008) et Shulman, L. S. (1986)
Connaissance Pédagogique du Contenu (CPC) / Pedagogical Content Knowledge (PCK)	Connaissance du contenu et des élèves (Knowledge of Content and Students - KCS)	Cette dimension concerne la compréhension des difficultés et des conceptions erronées des élèves face à des concepts mathématiques spécifiques. Il s'agit de savoir quelles stratégies les élèves utilisent naturellement, quelles erreurs ils sont susceptibles de commettre et pourquoi. Par exemple, quelles sont les difficultés récurrentes des élèves face aux problèmes impliquant des fractions ou des pourcentages ? Comment les élèves conceptualisent-ils la notion de variable ? Fennema, E., & Franke, M. L. (1992)
	Connaissance du contenu et de l'enseignement (Knowledge of Content and Teaching - KCT)	Cette connaissance porte sur les méthodes d'enseignement les plus efficaces pour des concepts mathématiques spécifiques. Elle inclut la connaissance des différentes approches pédagogiques, des ressources didactiques, des séquences d'apprentissage optimales et des stratégies pour engager les élèves. Par exemple, quelles sont les meilleures approches pour introduire la notion de fonction ? Quels types de problèmes favorisent la conceptualisation de l'algèbre ? Comment utiliser le matériel de manipulation ou les outils numériques pour soutenir l'apprentissage ? Schoenfeld, A. H. (1992), Hiebert, J., & Wearne, D. (1993)
Connaissance du Curriculum (Curricular Knowledge)	Connaissance des programmes et des progressions	Les enseignants doivent avoir une connaissance approfondie des programmes scolaires, des objectifs d'apprentissage à différents niveaux et des progressions conceptuelles. Cela inclut la compréhension de la manière dont les concepts sont introduits, développés et réinvestis au fil des années. Par exemple, comment la notion de nombre évolue-t-elle du primaire au secondaire ? Quels sont les prérequis pour aborder un nouveau chapitre ? 7.National Council of Teachers of Mathematics. (2000)
	Connaissance des ressources curriculaires	Il s'agit de la familiarité avec les manuels scolaires, les ressources en ligne, les exercices types et les évaluations standardisées. Comment les enseignants sélectionnent-ils et adaptent-ils ces ressources pour répondre aux besoins de leurs élèves ? Remillard, J. T. (2005).
Connaissance des processus	Connaissance des stratégies de	Les enseignants doivent non seulement connaître diverses stratégies (heuristiques, essais-erreurs,

de résolution de problèmes	résolution de problèmes	modélisation, raisonnement par l'absurde, etc.) mais aussi savoir comment les enseigner explicitement aux élèves. Comment guident-ils les élèves dans le choix et l'application de ces stratégies ? Polya, G. (1945).
	Connaissance des obstacles épistémologiques et didactiques	Comprendre les difficultés inhérentes à certains types de problèmes ou à certaines représentations mathématiques. Par exemple, pourquoi les problèmes de proportionnalité inverse sont-ils souvent mal interprétés ? Brousseau, G. (1997).
	Connaissance de la métacognition	Comment les enseignants encouragent-ils les élèves à réfléchir sur leur propre processus de résolution de problèmes, à planifier, à surveiller et à évaluer leur travail ? Flavell, J. H. (1979).

Tableau 3 : Connaissances des enseignants pour enseigner

Les enseignants, armés d'une solide connaissance du contenu, d'une connaissance pédagogique du contenu et d'une compréhension des processus d'apprentissage, sont alors en mesure de concevoir des situations didactiques pertinentes et d'accompagner efficacement les élèves dans la construction de leurs connaissances mathématiques.

2.2. Connaissances des enseignants pour enseigner la démarche de résolution de problèmes mathématiques

Ce cadre d'analyse pour convoquer les connaissances des enseignants est essentiel, il met en lumière l'interdépendance entre la connaissance du contenu, la connaissance pédagogique et la connaissance des apprenants.

2.2.1. *Connaissance des processus de résolution de problèmes*

Cette catégorie se concentre sur la maîtrise et l'enseignement des stratégies de résolution de problèmes. Les enseignants doivent posséder un répertoire varié d'heuristiques (comme l'essai-erreur, la modélisation, le raisonnement par l'absurde, la recherche de motifs, la simplification du problème, le travail à rebours, etc.) et être capables de les enseigner explicitement aux élèves, Polya, (1945). La question clé pour la recherche est de savoir comment les enseignants guident les élèves dans le choix et l'application de ces stratégies, ce qui implique d'observer leurs pratiques d'enseignement, leurs interactions avec les élèves et les types de feedback qu'ils fournissent, Hiebert & Wearne (1993). Cela inclut également la capacité à décomposer un problème complexe en étapes gérables et à encourager les élèves à explorer différentes voies possibles pour résoudre le problème.

2.2.2. *Connaissance des obstacles épistémologiques et didactiques*

Cette catégorie aborde la compréhension des difficultés inhérentes à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques. Les obstacles épistémologiques sont liés à la nature même des concepts mathématiques et aux difficultés conceptuelles que les élèves peuvent rencontrer, tandis que les obstacles didactiques sont souvent le résultat de choix pédagogiques ou de la manière dont les connaissances sont présentées, Brousseau, (1997). Par exemple, la question de savoir pourquoi les problèmes complexes sont souvent mal interprétés par les élèves est cruciale. Cela peut être dû à une mauvaise compréhension du langage mathématique, à des préconceptions erronées, ou à l'incapacité de relier de nouvelles informations à des connaissances antérieures, Vergnaud, (2009). La recherche dans ce domaine vise à identifier ces obstacles et à développer des stratégies pour les surmonter, en analysant les erreurs récurrentes des élèves et les conceptions alternatives qu'ils développent, Confrey, (1990).

2.2.3. *Connaissance de la métacognition*

La métacognition, ou la "cognition sur la cognition", est la capacité à réfléchir sur son propre processus de pensée, Flavell, (1979). Dans le contexte de la résolution de problèmes, cela signifie que les enseignants doivent savoir comment encourager les élèves à planifier leur approche, à surveiller leur progression, à évaluer l'efficacité de leurs stratégies et à ajuster leur démarche si nécessaire, Schoenfeld, (1992). Les questions spécifiques pour la collecte de données se concentrent sur les méthodes utilisées par les enseignants pour développer ces compétences métacognitives chez leurs élèves. Cela peut inclure l'utilisation de questions réflexives, l'encouragement à l'auto-évaluation, la modélisation de la pensée métacognitive par l'enseignant, ou la mise en place de discussions en classe sur les processus de résolution, Artzt & Armour-Thomas, (1992). L'objectif est de rendre les élèves plus autonomes et efficaces dans leur apprentissage des mathématiques, Livingston, (1997).

3. Méthodologie de la recherche

Pour analyser les connaissances des enseignants pour soutenir les élèves dans la résolution de problèmes mathématiques, nous avons adopté une méthodologie de nature qualitative.

3.1. Population et méthodes de collecte de données

Pour recueillir les connaissances des enseignants, nous avons administré un questionnaire exploratoire à 20 enseignants (annexe 1).

3.2. Méthodes d'analyse *des données du questionnaire* pour identifier les connaissances pour enseigner la résolution de problèmes :

Le tableau 4 suivant résume les questions spécifiques et les indicateurs qui guident respectivement, la collecte et l'analyse des données sur les connaissances des enseignants pour enseigner :

Catégories de connaissances	Types de connaissances	Questions spécifiques qui guident la collecte des données	Indicateurs principaux observés
Connaissance du Contenu Mathématique	Connaissance commune du contenu	Comment définissent-ils un concept comme la notion de fonction ? Quelles sont les différentes méthodes pour résoudre un problème exploitant la notion de fonction?	Définition correcte de la fonction (au plus une image), identification des objets mathématiques
	Connaissance spécialisée du contenu	Demander aux enseignants de résoudre des problèmes mathématiques complexes, d'expliquer des concepts à un élève imaginaire, ou de justifier des procédures.	Justification des procédures, modélisation, choix pertinent de la variable
Connaissance Pédagogique du Contenu	Connaissance du contenu et des élèves	Quelles sont les difficultés récurrentes des élèves face aux problèmes impliquant les fonctions ? Comment les élèves conceptualisent-ils la notion de variable ?	Identification des difficultés, conceptions intermédiaires et erreurs fréquentes
	Connaissance du contenu et de l'enseignement	Quelles sont les meilleures approches pour introduire la notion de fonction ? Quels types de problèmes favorisent la conceptualisation de l'algèbre ? Comment utiliser le matériel de manipulation ou les outils numériques pour soutenir l'apprentissage des fonctions ? Présenter des exemples d'erreurs d'élèves et demandez-leur d'analyser l'origine de ces erreurs et comment ils y remédieraient.	Choix de situations, étayage progressif, questionnement guidé
Connaissance du Curriculum	Connaissance des programmes et des progressions	Comment la notion de fonction évolue-t-elle du primaire au secondaire ? Quels sont les prérequis pour aborder un nouveau chapitre qui aborde les fonctions ?	Repérage des niveaux, identification des prérequis, continuité curriculaire
	Connaissance des ressources curriculaires	Comment les enseignants sélectionnent-ils et adaptent-ils ces ressources pour répondre aux besoins de leurs élèves ?	Usage des manuels, situations-problèmes, outils numériques
Connaissance des processus de résolution	Connaissance des stratégies de résolution	Comment guident-ils les élèves dans le choix et l'application de ces stratégies ?	Modélisation, tableaux, graphiques, essais numériques

de problèmes	de problèmes		
	Connaissance des obstacles épistémologiques et didactiques	Pourquoi les problèmes complexes sont-ils souvent mal interprétés ?	Abstraction, langage mathématique, registres de représentation
	Connaissance de la métacognition	Comment les enseignants encouragent-ils les élèves à réfléchir sur leur propre processus de résolution de problèmes, à planifier, à surveiller et à évaluer leur travail ?	Planification, contrôle et évaluation de la démarche

Tableau 4 : Questions spécifiques et indicateurs qui guident la collecte et l'analyse des données sur les connaissances des enseignants pour enseigner

Les méthodes d'analyses utilisées pour examiner les réponses des enseignants de 20 enseignants aux neuf questions respectent les indicateurs construit dans la grille (tableau 4). Concernant la définition de la fonction, les réponses ont été évaluées pour leur précision. Pour le problème de l'aire de baignade, la capacité des enseignants à justifier leur modélisation a été codée. Pour les difficultés des élèves, il a été vérifié si les enseignants pouvaient identifier les obstacles rencontrés. L'analyse des approches numériques a évalué l'utilisation adéquate d'outils pour comprendre les fonctions. Enfin, l'adaptation des ressources curriculaires et les pratiques d'accompagnement pour favoriser la métacognition des élèves ont également été analysées.

4. Analyse et interprétation des résultats

4.1. Portrait des connaissances des enseignants selon les réponses des enseignants au questionnaire exploratoire

Les résultats présentés, dans le tableau 5 ci-dessous, ont été obtenus après analyse des réponses de vingt enseignants à un questionnaire sur les connaissances mobilisées pour enseigner la résolution de problèmes mathématiques. Les réponses ont été soumises à un traitement à la fois qualitatif et quantitatif, sur la base des indicateurs principaux observés. Pour chaque dimension de connaissance, des indicateurs explicites ont été identifiés, à savoir : définition formelle, stratégies nommées, obstacles explicités, référence explicites aux programmes, etc., et une réponse a été considérée comme conforme à la dimension seulement si un indicateur apparaissait explicitement, sans ambigüité, dans le discours de l'enseignant.

Dimension de connaissance	Indicateurs principaux observés	Pourcentage (%)/Effectif (n)	Niveau dominant	Interprétation didactique
Connaissance commune du contenu	Définitions correctes, identification des objets mathématiques	10 % (2)	Faible	*Base conceptuelle solide permettant d'aborder efficacement la résolution de problèmes*
Connaissance spécialisée du contenu	Justification des procédures, modélisation, choix pertinent de la variable	50 %(10)	Moyen	*Maîtrise experte présente mais parfois centrée sur l'aspect technique au détriment du sens*
Connaissance du contenu et des élèves	Identification des difficultés, conceptions intermédiaires et erreurs fréquentes	85 %(17)	Fort	*Permet un guidage adapté et un accompagnement ciblé des élèves*
Connaissance du contenu et de l'enseignement	Choix de situations, étayage progressif, questionnement guidé	70 %(14)	Moyen à fort	*Enseignement efficace, parfois marqué par une orientation procédurale*
Connaissance des programmes et des progressions	Repérage des niveaux, identification des prérequis, continuité curriculaire	80 %(16)	Fort	*Favorise la cohérence des apprentissages et la progressivité conceptuelle*
Connaissance des ressources curriculaires	Usage des manuels, situations-problèmes, outils numériques	75 %(15)	Moyen à fort	*Soutient la visualisation, la différenciation et l'adaptation pédagogique*
Connaissance des stratégies de résolution de problèmes	Modélisation, tableaux, graphiques, essais numériques	80 %(16)	Fort	*Développe la flexibilité cognitive et l'autonomie des élèves*
Connaissance des obstacles épistémologiques et didactiques	Connaissance des obstacles épistémologiques et didactiques	60 %(12	Moyen	*Permet d'anticiper les erreurs et de mieux structurer l'enseignement*
Connaissance de la métacognition	*Planification, contrôle et évaluation de la démarche*	*65 %(13)*	*Moyen*	*Levier central pour une résolution de problèmes réflexive et consciente*

Tableau 5 : Résultats de l'analyse des réponses des enseignants au questionnaire

4.1.1. *Connaissance du contenu mathématique*

Les résultats combinés des deux dimensions, connaissance commune du contenu et connaissance spécialisée du contenu, offrent une image nuancée des compétences des enseignants.

La connaissance commune du contenu correspond aux connaissances mathématiques qu'un enseignant instruit possède ou qu'un étudiant est censé acquérir. Elle inclut la capacité de résoudre des problèmes, d'identifier des objets mathématiques et d'utiliser des définitions correctes. Dans le tableau 5, cette dimension affiche un score de 10 % (n=2), qualifié de faible. D'un point de vue didactique, ce résultat est alarmant car la connaissance commune du contenu constitue le socle sur lequel repose toute transposition didactique. Comme le souligne Shulman dans ses travaux fondateurs sur la connaissance pédagogique du contenu, un enseignant ne peut enseigner ce qu'il ne comprend pas lui-même en profondeur. Si seulement 10 % des sujets identifient correctement les objets mathématiques, cela suggère une fragilité des savoirs de base. Cependant, notre interprétation didactique mentionne une base conceptuelle solide. Il y a ici une tension analytique : soit l'échantillon est très restreint (N=20), soit la faiblesse numérique cache une qualité de réponse élevée chez les enseignants ayant réussi. La connaissance spécialisée du contenu est propre à l'enseignement. Elle ne consiste pas seulement à savoir résoudre un exercice, mais à comprendre pourquoi une procédure fonctionne, à anticiper les erreurs des élèves et à choisir des représentations adéquates. Les résultats du tableau 5 indique un taux de 50 % (n=10), qualifié de moyen. Cette dimension est cruciale, car elle implique la modélisation et la justification des procédures. Le fait que 50 % des sujets maîtrisent cet aspect montre une capacité à manipuler l'outil mathématique dans un contexte professionnel. Cependant, l'interprétation souligne une maîtrise centrée sur l'aspect technique au détriment du sens. Ce phénomène est bien documenté par Richard Skemp, qui distingue la compréhension instrumentale (savoir comment appliquer une règle) de la compréhension relationnelle (savoir pourquoi on l'applique). Ici, les sujets semblent posséder des routines algorithmiques (choix de la variable, procédures) sans nécessairement pouvoir les lier à une structure conceptuelle profonde qui interpelle le sens.

Le croisement de ces deux dimensions révèle un profil de compétences déséquilibré. En didactique, on utilise souvent le concept de transposition didactique de Chevallard pour expliquer comment le savoir savant devient un savoir enseigné. Le passage de 10 % en CCK à 50 % en SCK suggère que les sujets ont développé des compétences spécifiques à la tâche (modélisation, procédures) par mimétisme ou apprentissage procédural, sans pour autant stabiliser les définitions de base. La capacité à choisir une variable pertinente est un indicateur de la pensée algébrique. Selon les travaux de Kieran, cela nécessite une transition de l'arithmétique vers l'algèbre qui n'est pas seulement technique mais conceptuelle. Considérons l’impact sur l'enseignement, un enseignant disposant d'une SCK moyenne, mais d'une CCK faible risque de transmettre des algorithmes vides de sens. Ma (1999) souligne que les enseignants les plus efficaces possèdent une compréhension profonde des mathématiques fondamentales, ce qui semble manquer ici.

L’analyse montre une population capable de produire des justifications techniques (50 %) mais dont l'ancrage dans les définitions rigoureuses et l'identification formelle des objets est déficient (10 %). Cela indique une nécessité de renforcer la formation sur les fondamentaux conceptuels pour que la technique ne soit plus une fin en soi, mais un outil au service du sens mathématique.

4.1.2. *Connaissance pédagogique du contenu*

Ce cadre théorique, introduit initialement par Lee Shulman, postule que l'expertise d'un enseignant ne réside pas seulement dans sa maîtrise de la discipline, mais dans sa capacité à transformer ce savoir savant en un savoir enseignable, adapté aux capacités et aux besoins des élèves. Les résultats du tableau 5 indiquent un score de 85 % (n=17) pour la connaissance du contenu et des élèves. Ce niveau est qualifié de Fort. Dans la littérature spécialisée, notamment dans les travaux de Deborah Ball et de ses collègues sur la Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), cette dimension est définie comme la connaissance qui combine la compréhension du sujet avec la compréhension de la manière dont les élèves apprennent ce sujet spécifique. Un taux de 85 % suggère que les enseignants observés possèdent une capacité aiguë à anticiper ce que les élèves vont trouver facile ou difficile. Comme le souligne Shulman dans ses écrits fondateurs, cette compétence implique une connaissance des conceptions et préconceptions des élèves de différents âges et contextes. L'identification des conceptions intermédiaires et des erreurs fréquentes mentionnées dans ce tableau est cruciale. Un score élevé indique ici que l'enseignant ne se contente pas de corriger l'erreur, mais qu'il l'utilise comme un levier pédagogique pour restructurer la pensée de l'élève.

La deuxième dimension, connaissance du contenu et de l'enseignement, affiche un score de 70 % (n=14), qualifié de moyen à fort. Cette dimension concerne la planification de l'enseignement : le choix des exemples, la séquence des activités et la sélection des représentations les plus instructives. Un score de 70 % montre une maîtrise de l'étayage, concept développé par Jérôme Bruner, où l'enseignant fournit un soutien temporaire pour aider l'élève à atteindre un niveau de compétence qu'il ne pourrait atteindre seul. Cependant, la nuance procédurale suggère que l'enseignement pourrait privilégier le commentaire (les règles et étapes) au détriment du pourquoi (la logique sous-jacente).

L'écart entre la reconnaissance des difficultés des élèves (85 %) et l'efficacité du choix des situations d'enseignement (70 %) révèle une dynamique intéressante. Il semble y avoir une excellente capacité de diagnostic, mais une mise en œuvre pédagogique légèrement plus contrainte par des méthodes traditionnelles ou directives.

Les données montrent un profil d'enseignants qui identifient parfaitement les blocages, mais qui, dans l'action, tendent vers un guidage peut-être trop serré. Pour passer d'un niveau moyen à fort, à un niveau fort dans la seconde dimension, la littérature suggère de favoriser des situations d'apprentissage plus ouvertes, permettant aux élèves de tester leurs propres hypothèses plutôt que de suivre un questionnement trop dirigé.

4.1.3. *Connaissance du curriculum*

Concernant l'analyse de la connaissance des programmes et des progressions, le premier indicateur révèle un taux de réussite ou de maîtrise de 80 % (n=16), qualifié de fort. Cette dimension concerne la capacité de l'enseignant à situer une leçon dans une trajectoire d'apprentissage à long terme. Selon les travaux de Shulman, la connaissance curriculaire est l'un des trois piliers de la connaissance du contenu, permettant à l'enseignant de comprendre ce que les élèves ont appris précédemment et ce qu'ils devront maîtriser par la suite. L'interprétation didactique souligne que ce niveau fort, favorise la cohérence des apprentissages. Un score de 80 % suggère que les enseignants observés possèdent une vision holistique du curriculum, ce qui limite le risque de fragmentation des connaissances. Ils sont capables d'identifier les prérequis nécessaires, entraînant ainsi les ruptures cognitives chez l'élève.
Quant à l'analyse de la connaissance des ressources curriculaires, le deuxième indicateur affiche un score de 75 % (n=15), jugé moyen à fort. Cette dimension englobe l'usage des manuels, des situations-problèmes et des outils numériques. Bien que solide, ce score légèrement inférieur au premier indique une marge de progression dans l'intégration efficace des outils. L'utilisation des ressources ne se limite pas à une simple technique de manipulation ; il s'agit d'une médiation instrumentale. Selon Pierre Rabardel, un outil (comme un logiciel numérique ou un manuel) ne devient un instrument que lorsque l'enseignant a développé des schémas d'utilisation pour atteindre un objectif pédagogique précis. La légère baisse (75 % contre 80 %) pourrait s'expliquer par la complexité de l'adaptation pédagogique. Si la connaissance des programmes est théorique et organisationnelle, l'utilisation des ressources est pragmatique et situationnelle. Il exige une capacité à modifier les supports en temps réel pour répondre aux besoins hétérogènes d'une classe. L'interaction entre ces deux dimensions est cruciale. Une forte connaissance des programmes (80 %) sans une maîtrise équivalente des ressources (75 %) pourrait mener à un enseignement rigide, où l'enseignant sait où il va, mais peine à diversifier les chemins pour y parvenir. Inversement, l'équilibre observé ici montre une professionnalité enseignante mature.
Les données indiquent que les enseignants possèdent une base solide pour mettre en œuvre une ingénierie didactique efficace. Le défi réside désormais dans le renforcement de l'usage des outils numériques et des situations-problèmes pour atteindre le même niveau d'excellence que celui de la maîtrise des programmes, assurant ainsi une personnalisation accrue des parcours d'apprentissage.

4.1.4. *Connaissance des processus de résolution de problèmes*

La connaissance des processus de résolution de problèmes met en lumière trois dimensions fondamentales : les stratégies de résolution de problèmes, la gestion des obstacles (épistémologiques et didactiques) et la métacognition.
L'analyse de la connaissance des stratégies de résolution de problèmes montre un taux de 80 % (n=16), cette dimension est identifiée comme le niveau dominant.

L'utilisation de la modélisation, des tableaux, des graphiques et des essais numériques témoigne d'une approche heuristique robuste. Selon les travaux classiques de George Pólya dans How to Solve It, la capacité à varier les représentations d'un problème est le signe distinctif d'une pensée mathématique flexible. Cela renvoie à la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, où l'élève doit disposer d'un répertoire de stratégies pour s'adapter au milieu mathématique.
L'interprétation didactique souligne que cette maîtrise favorise l'autonomie. En effet, lorsque l'enseignant ou l'élève utilise des outils de modélisation, il passe d'une exécution procédurale à une compréhension conceptuelle. Les recherches de Schoenfeld sur la résolution de problèmes confirment que la réussite ne dépend pas seulement de la connaissance des faits, mais de la capacité à choisir la stratégie appropriée parmi un ensemble de ressources disponibles. Un score de 80 % suggère que les sujets de l'étude ont intégré la résolution de problèmes non comme une fin en soi, mais comme un outil de développement de la flexibilité cognitive.
La connaissance des obstacles affiche un score de 60 % (n=12), classé comme moyen. Ce résultat est crucial car, comme l'a théorisé Gaston Bachelard, l'acte de connaître se fait contre une connaissance antérieure : on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites. En mathématiques, un obstacle épistémologique est une résistance inspirée au concept (par exemple, le passage des entiers aux décimaux), tandis qu'un obstacle didactique résultant des choix d'enseignement.
Le fait que ce niveau soit moyen indique une capacité d'anticipation des erreurs qui restent à consolider. L'interprétation didactique mentionne les registres de représentation sémiotique, un concept développé par Raymond Duval. Elle soutient que la compréhension mathématique réside dans la capacité à convertir une représentation (par exemple, un graphique) en une autre (une équation). Un score de 60 % suggère que si les enseignants identifient les erreurs courantes, la distinction fine entre une simple faute d'inattention et un véritable obstacle conceptuel nécessite encore un renforcement théorique pour mieux structurer l'enseignement.
La métacognition, avec 65 % (n=13), se situe également à un niveau moyen. Elle englobe la planification, le contrôle et l'évaluation de la démarche. Flavell, définit la métacognition comme la connaissance que l'on a de ses propres processus cognitifs. Dans le contexte de la résolution de problèmes, cela signifie savoir quand une stratégie ne fonctionne pas et être capable de changer de direction.
L'interprétation didactique qualifie la métacognition de « levier central ». En effet, sans une régulation consciencieuse, l'élève peut appliquer des stratégies de modélisation (pourtant maîtrisées à 80 %) de manière mécanique sans en vérifier la pertinence. Les travaux de Garofalo et Lester soulignent que les difficultés en mathématiques proviennent souvent d'un manque de contrôle métacognitif plutôt que d'un manque de connaissances mathématiques pures. Un niveau de 65 % montre que les sujets commencent à intégrer une posture réflexive, mais que l'habitude de « penser sur sa propre pensée » n'est pas encore totalement automatisée dans la pratique didactique.

L'interprétation globale révèle une hiérarchie intéressante. La maîtrise technique des outils (stratégies) est excellente, mais la compréhension des mécanismes d'erreur (obstacles) et la régulation de l'action (métacognition) sont en retrait. Pour optimiser l'enseignement, il serait nécessaire de créer des ponts entre ces dimensions. Par exemple, l'utilisation d'un graphique (stratégie) devrait être systématiquement accompagnée d'une réflexion sur pourquoi ce graphique peut induire en erreur (obstacle) et d'une vérification de sa cohérence avec le résultat attendu (métacognition).
Cette analyse suggère que pour passer d'un niveau moyen à fort dans les deux dernières catégories, la formation devrait mettre l'accent sur l'analyse de l'erreur comme outil didactique positif et sur l'explicitation des processus mentaux lors de la résolution de tâches complexes.

4.1.5. *Synthèse des résultats*

L'analyse des résultats révèle une base conceptuelle consistante chez la majorité des participants, essentielle pour l'abord de la résolution de problèmes. Cependant, bien qu'une maîtrise experte des aspects spécialisés du contenu soit présente chez une proportion significative, elle est parfois caractérisée par une focalisation sur l'aspect technique au détriment du sens. Cette observation est cruciale pour l'élaboration de stratégies pédagogiques visant à développer une compréhension plus holistique et significative des mathématiques, en encourageant la justification des procédures et la connexion entre les concepts et leurs applications. La connaissance des processus de résolution de problèmes se divise en trois dimensions : les stratégies de résolution de problèmes, la gestion des obstacles et la métacognition. Les stratégies montrent un bon niveau avec un score de 80 %, reflétant une approche heuristique solide utilisant modélisation, diagrammes et essais numériques. Cela est en accord avec les théories de Pólya et Brousseau sur l'importance de la flexibilité de pensée en mathématiques. L'utilisation de ces outils favorise l'autonomie en aidant à passer d'une exécution procédurale à une compréhension plus profonde.
La gestion des obstacles obtient un score de 60 %, suggérant une capacité moyenne à anticiper les erreurs. Selon Bachelard, connaître implique de remettre en question des connaissances antérieures. Ce score indique que les enseignants doivent encore travailler sur la distinction entre erreurs d'attention et véritables obstacles conceptuels.
La métacognition, évaluée à 65 %, englobe la planification et l'évaluation des stratégies. Flavell la décrit comme la connaissance de ses propres processus cognitifs. La régulation métacognitive est essentielle, car sans elle, les élèves peuvent appliquer des stratégies sans discernement. La formation devrait alors se concentrer sur l'analyse des erreurs et l'explicitation des processus mentaux pour améliorer ces dimensions.

4.2. Analyse qualitative du questionnaire des enseignants

Le questionnaire est organisé de manière à évaluer le niveau des connaissances professionnelles de l'enseignant tout au long de ces étapes, suivant les approches heuristiques de la résolution de problème : la compréhension du problème, l'élaboration des stratégies, l'utilisation des procédures et la validation des résultats obtenus. Chaque catégorie de questions vise à identifier les connaissances mobilisées par l'enseignant pour soutenir ces phases et favoriser la conceptualisation chez les élèves.

4.2.1. Connaissance du contenu mathématique

4.2.1.1. Connaissance commune du contenu : définir une fonction et les méthodes utilisées

Nous voulons vérifier les connaissances des enseignants sur la définition de la notion de fonction ainsi que les méthodes utilisées pour mobiliser cette notion. Les réponses des enseignants aux questions : Comment définissez-vous la notion de fonction ? Quelles sont les différentes méthodes pour résoudre un problème exploitant cette notion de fonction ? sont synthétisées comme suit : La notion de fonction est un concept fondamental en mathématiques, essentiel pour modéliser et comprendre les relations entre différentes quantités ou objets. Elle est omniprésente dans de nombreux domaines scientifiques et techniques, de la physique à l'économie en passant par la biologie et l'ingénierie. « *Une fonction est une relation qui associe à chaque élément d'un ensemble de départ une unique valeur dans un ensemble d'arrivée. Elle peut être définie comme une règle mathématique qui relie des grandeurs. Pour résoudre un problème lié à cette notion, on peut utiliser plusieurs méthodes : algébrique (formule), graphique (courbe) ou numérique (tableau de valeurs). Cela inclut la modélisation, le calcul, la représentation graphique et l'interprétation. La fonction implique une dépendance entre des variables. Par exemple, elle peut être utilisée pour des calculs pratiques comme ceux des factures d'électricité. Une fonction, décrite comme une sorte de machine, transforme un nombre d'entrée en un nombre de sortie. La notion se prolonge à des types comme la fonction linéaire, affine ou polynomiale. Dans un exemple, appeler un numéro de téléphone illustre cette relation : le numéro est l'élément d'entrée, et l'appel abouti ou non en est le résultat. Chaque entrée doit donner une seule sortie, et certaines valeurs peuvent ne pas être acceptées* ».

Les définitions formulées par les enseignants témoignent que l'enseignement des fonctions souffre souvent d'un décalage entre la définition intuitive et la définition formelle de Dirichlet-Bourbaki. Au XVIIe siècle, Leibniz utilisait le terme pour désigner des quantités variant avec une courbe, tandis qu'Euler (1748), dans son ouvrage, définissait la fonction comme une expression analytique. L'erreur fréquente des enseignants est de rester ancrés dans cette vision eulérienne, limitant la fonction à une formule algébrique. Or, une fonction peut être définie par un graphe, un tableau, ou même une correspondance arbitraire sans expression analytique simple.

4.2.1.2. Connaissance spécialisée du contenu : Expliquer des concepts mathématiques à un élève

Nous voulons ici savoir comment les enseignants expliquent des concepts mathématiques à un élève, et comment ils justifient des procédures relativement à la résolution du problème de la baignade. Les réponses des enseignants interrogés sont, généralement, focalisées sur les procédures de résolution du problème posé. Ils disent, pour expliquer des concepts mathématiques à un élève, on se base sur un problème concernant l'aménagement d'une aire de baignade rectangulaire. Le responsable d'un parc souhaite maximiser cette aire avec un cordon flottant de 130 mètres, utilisé pour délimiter trois côtés du

rectangle. Les bouées, notées B et C, déterminent la largeur de l'aire. On définit les variables : x pour la largeur (AB et CD) et y pour la longueur (BC). Avec la contrainte du cordon, on trouve que y = 130 - 2x. L'aire A(x) est donnée par x(130 - 2x). Pour maximiser l'aire, on cherche la valeur de x, qui est calculée à 32,5 mètres, tandis que y sera 65 mètres. Les bouées doivent être placées à 65 mètres l'une de l'autre et à 32,5 mètres du bord de la rivière pour obtenir l'aire maximale. Ils ajoutent, pour résoudre ce problème, il est important de modéliser avec les bonnes inconnues, d'exprimer l'aire en fonction d'une variable, puis d'identifier le maximum de cette fonction. On clarifie les relations entre x et y, en utilisant des notions de fonction. Ensuite, on applique des principes de géométrie et d'algèbre pour trouver les dimensions optimales du rectangle.
Finalement, il est démontré que l'aire de baignade sera maximale, atteignant 2112,5 m², lorsque les bouées sont placées à la bonne distance par rapport à la rive et entre elles. Ce processus démontre bien la présence des connaissances spécialisée du contenu chez les enseignants ainsi que l'importance de traduire une situation réelle en fonction mathématique et d'utiliser des outils mathématiques pour optimiser une situation pratique.

4.2.2. Connaissance pédagogique du contenu

4.2.2.1. Connaissance du contenu et des élèves : Difficultés des élèves avec les fonctions et la conceptualisation de la variable

Nous voulons investiguer les connaissances des enseignants sur les difficultés des élèves avec les fonctions et la conceptualisation de la notion de variable. Pour cela, nous les avons interrogés sur les questions : Quelles sont les difficultés récurrentes des élèves face aux problèmes impliquant les fonctions ? Comment les élèves conceptualisent-ils la notion de variable ? Les réponses des enseignants montrent qu'ils sont en accord avec le fait que les élèves rencontrent plusieurs difficultés avec les problèmes de fonctions, principalement lorsqu'ils doivent passer d'une situation concrète à une forme mathématique abstraite. Les élèves ont souvent du mal à comprendre la variable, la voyant comme une lettre fixe plutôt que comme une valeur qui peut changer. Cela les empêche de bien modéliser des situations, ce qui est essentiel pour résoudre des problèmes. Les élèves confondent souvent les concepts de variable et d'inconnue, et rencontrent des difficultés à interpréter des graphiques. Ils ne savent pas toujours quelle grandeur varie, ce qui les empêche de comprendre la dépendance fonctionnelle. Par exemple, ils considèrent souvent une fonction comme une formule sans percevoir la relation dynamique entre les grandeurs. Les problèmes d'optimisation posent également des défis, notamment dans le choix de la variable et l'interprétation des résultats.
Pour surmonter ces obstacles, il est suggéré de proposer davantage de situations concrètes et d'insister sur le langage lié aux variables et à leurs relations. Il est aussi crucial de systématiser l'utilisation de différentes représentations mathématiques. En aidant les élèves à passer d'une vision instrumentale des fonctions à une compréhension structurelle, ils pourront mieux mathématiser les situations problèmes.
Enfin, il y a un besoin d'améliorer leur compréhension des notions fondamentales, afin qu'ils sachent que la variable représente une grandeur qui peut varier.

4.2.2.2. Connaissance du contenu et de l'enseignement : meilleures approches pour le concept de fonction et analyse des erreurs

En répondant aux questions : Quelles sont les meilleures approches pour introduire la notion de fonction ? Quels types de problèmes favorisent la conceptualisation de l'algèbre ? Comment utiliser le matériel de manipulation ou les outils numériques pour soutenir l'apprentissage des élèves sur la notion de fonction ? Comment analysez-vous les erreurs d'élèves et les remédiez ? les enseignants proclament que, pour enseigner la notion de fonction, il est essentiel de partir de situations concrètes, comme celles rencontrées dans la vie quotidienne, et d'utiliser divers supports comme des tableaux, des graphiques et des outils numériques. L'utilisation de GeoGebra est particulièrement utile pour visualiser les variations des fonctions. Les erreurs des élèves doivent être analysées afin d'en identifier l'origine, que ce soit une confusion de concepts, une erreur de calcul, ou une mauvaise interprétation et compréhension des questions.

Les meilleures approches incluent plusieurs méthodes : l'approche par dépendance (relation entre deux grandeurs), l'approche graphique, l'approche par tableau de valeurs et l'approche algébrique. Il est également important de mêler les représentations multiples pour renforcer la compréhension. Pour faciliter la conceptualisation de l’algèbre, les enseignants suggèrent de se concentrer sur des problèmes où une grandeur varie et influence une autre, comme les problèmes d'optimisation, de proportionnalité, de transformation ou des problèmes paramétriques.

Concernant l'utilisation de matériel de manipulation et d'outils numériques, l'utilisation de blocs, de cordes et de figures géométriques aide les élèves à visualiser la relation entre variables et fonctions. Les outils numériques permettent de tracer instantanément des courbes et de manipuler des valeurs pour observer leurs effets, développant ainsi une compréhension dynamique.

En ce qui concerne l'analyse et la remédiation des erreurs, il est crucial d'identifier l'origine de chaque erreur, qu'il s'agisse d’une confusion entre variable et constant, d'une dépendance mal comprise, ou d'erreurs de raisonnement. Des méthodes de remédiation peuvent inclure des discussions guidées, des représentations multiples et des exercices progressifs pour renforcer la compréhension.

En résumé, la notion de fonction doit se construire à travers des expériences concrètes et un accompagnement pédagogique qui privilégie l'analyse des erreurs et la diversité des approches et des outils.

4.2.3. Connaissance du curriculum

4.2.3.1. Connaissance des programmes et des progressions : évolution de la notion de fonction

Dans le cadre de l’analyse de la connaissance du curriculum, les enseignants ont ont été interrogé à travers les question suivantes :Comment la notion de fonction évolue-t-elle du primaire au secondaire ? Quels sont les prérequis pour aborder un nouveau chapitre qui aborde les fonctions (au tronc commun)?

Au primaire, la notion de fonction est intuitive et se révèle à travers des relations simples entre deux grandeurs, comme des tableaux et des situations concrètes. Les élèves rencontrent des suites logiques, sans encore formaliser le concept.

Au collège, le concept devient plus explicite avec l'introduction des variables et des correspondances entre les valeurs d'entrée et de sortie. Les élèves commencent à travailler avec des tableaux, des formules simples et des graphiques.

Au lycée, le concept de fonction se complexifie davantage. Les élèves étudient les fonctions affines, linéaires, carrées, inverses et certaines trigonométriques, en se concentrant sur l'analyse de ces fonctions, y compris leur définition, leurs variations, et l'interprétation graphique. Les élèves commencent à modéliser des situations complexes à l'aide de ces fonctions.

Pour réussir dans ce domaine, les élèves doivent maîtriser plusieurs prérequis, comme le calcul littéral, la résolution d'équations simples, et la capacité à lire et exploiter des tableaux de valeurs. Ils doivent aussi comprendre les notions de proportionnalité et de repérage dans le plan. La progression de la notion de fonction commence par des concepts concrets au primaire, évolue vers l'algèbre et les graphiques au collège, puis devient abstraite et analytique au secondaire, nécessitant une bonne maîtrise des opérations mathématiques de base.

L'analyse des résultats souligne une maîtrise significative de la progression curriculaire par les enseignants concernant la connaissance des paliers d'apprentissage de la notion de fonction. Cette expertise permet d'assurer une continuité pédagogique, allant de l'intuition à l'école primaire jusqu'à l'abstraction analytique au lycée. Cependant, l'étude indique un écart entre cette connaissance théorique du curriculum et sa mise en œuvre en classe. Les enseignants connaissent clairement les prérequis nécessaires, comme le calcul littéral ou la proportionnalité. Pourtant, l'ajustement des stratégies pédagogiques face aux difficultés rencontrées par les élèves pose problème . Ainsi, bien que la connaissance des programmes soit essentielle pour la cohérence du parcours scolaire, elle doit être complétée par une analyse plus approfondie des processus de remédiation. Cela permettra de transformer ce savoir en un véritable levier pour l'apprentissage

.

4.2.3.2. Connaissance des ressources curriculaires : sélection et adaptation des ressources

Pour analyser les connaissances curriculaires des enseignants, une attention particulière est accordée à leur capacité à mobiliser et exploiter les ressources pédagogiques. À cet effet, la question portant sur la manière dont les enseignants sélectionnent et adaptent les ressources pour répondre aux besoins de leurs élèves permet d’explorer non seulement leur familiarité avec les supports disponibles, mais aussi leur aptitude à les transformer en fonction des objectifs d’apprentissage et des caractéristiques des apprenants.

En effet, selon Lee Shulman, la connaissance du curriculum inclut la maîtrise des supports pédagogiques et leur utilisation dans l’enseignement. Les résultats montrent que les enseignants disposent de cette connaissance au niveau de l’identification et de l’utilisation des ressources. Toutefois, le manque d’adaptation approfondie révèle une limite dans la transformation de ces ressources pour les rendre accessibles aux élèves.

Cette difficulté peut être interprétée à la lumière du cadre de Deborah Ball, notamment en ce qui concerne la connaissance du contenu et de l’enseignement (KCT) ainsi que la connaissance du contenu et des élèves (KCS). En effet, l’adaptation des ressources nécessite non seulement de comprendre le contenu mathématique, mais aussi d’anticiper les difficultés des élèves et de choisir des modalités d’enseignement appropriées.

L’absence d’une adaptation explicite suggère donc une mobilisation partielle de ces dimensions.
Par ailleurs, ces résultats rejoignent les travaux de Janine Remillard, qui mettent en évidence que l’usage des ressources ne garantit pas leur appropriation. L’enseignant doit engager un travail actif de sélection, d’interprétation et de reconfiguration des supports.
Par conséquent, l'étude révèle une utilisation des ressources pédagogiques conforme aux directives, tout en soulignant que les méthodes d'adaptation demeurent peu détaillées dans les réponses obtenues. Les informations indiquent que les enseigants évoquent principalement les matériels qu'ils emploient, sans nécessairement exposer les démarches de modification ou d'ajustement qui vont avec.

4.2.4. Connaissance des processus de résolution de problèmes

4.2.4.1. Connaissance des stratégies de résolution de problèmes

Les enseignants guident les élèves.

Dans les réponses à la question : Comment les enseignants guident-ils les élèves dans le choix et l'application de stratégies de résolution d’un problème ? Les enseignants déclarent qu’ils aident les élèves à choisir et appliquer des stratégies pour résoudre des problèmes. Ils commencent par faire comprendre le problème, en posant des questions ouvertes et en les incitant à schématiser les informations. Ensuite, ils aident à identifier les données importantes, les inconnues et les contraintes.
Les enseignants encouragent les élèves à reformuler le problème et à réfléchir à différentes méthodes de résolution, comme l’algèbre ou le calcul numérique. Ils jouent le rôle de facilitateur en guidant les élèves sans donner la solution directement.
Lors de l'application de la stratégie, ils incitent les élèves à décomposer le problème en étapes et à vérifier leurs résultats. Ils encouragent aussi l’expérimentation et la discussion des méthodes pour choisir la meilleure approche.

4.2.4.2. Connaissance des obstacles épistémologiques et didactiques

Problèmes complexes mal compris.

Les enseignants dans leurs réponses à la question : Pourquoi les problèmes complexes sont-ils souvent mal interprétés par les élèves? s’accordent de dire que les problèmes complexes sont souvent mal compris par les élèves pour plusieurs raisons. D'abord, ils ont du mal à relever les informations importantes et à passer de la réalité à des concepts abstraits. Cela entraîne une mauvaise interprétation des énoncés, souvent due à une surcharge d'informations ou à une lecture hâtive. Les élèves confondent fréquemment des termes comme « variable » et « résultat », ce qui complique encore plus leur compréhension.
De plus, ces problèmes nécessitent plusieurs étapes et une bonne maîtrise des bases mathématiques, comme l'algèbre et la lecture de graphiques. Beaucoup d’élèves ne parviennent pas à relier une situation concrète à une modélisation mathématique et peinent à naviguer entre différents formats d'information.
Enfin, la langue utilisée dans les énoncés peut poser un problème, surtout pour ceux qui ne maîtrisent pas bien le français. Cela devient un obstacle à la compréhension, limitant l'intérêt des élèves pour les mathématiques. Dans le système éducatif marocain, les problèmes complexes sont rares, ce qui aggrave cette situation.

4.2.4.3. Connaissance de la métacognition : les enseignants encouragent les élèves à réfléchir

Les réponses des enseignants à la question : comment les enseignants encouragent-ils les élèves à réfléchir sur leur propre processus de résolution de problèmes, à planifier, à surveiller et à évaluer leur travail ? Les enseignants encouragent les élèves à réfléchir sur leur processus de résolution de problèmes en les incitant à planifier, surveiller et évaluer leur travail. Ils posent des questions telles que « Pourquoi as-tu choisi cette méthode ? » et utilisent des outils d'auto-évaluation. Les élèves doivent reformuler l'énoncé, identifier les données et choix stratégiques avant de commencer. Pendant la résolution, les enseignants leur posent des questions sur l'avancement et la logique de chaque étape.
Ils font aussi des discussions collectives sur les stratégies utilisées, permettant ainsi d'analyser les erreurs. Les enseignants mettent l'accent sur l'importance de la démarche plutôt que sur le résultat final. Ils encouragent l'autonomie en accueillant les erreurs comme des occasions d'apprentissage.
Les principes clés incluent développer la métacognition, favoriser l'esprit critique et utiliser des questions ouvertes. Les enseignants suggèrent des activités proches des intérêts des élèves, offrant une structure pour la planification, le contrôle et l'évaluation de leur travail. Ils utilisent également des grilles d'auto-évaluation pour renforcer cette réflexion.

4.3. Synthèse de l'analyse qualitative du questionnaire portant sur les connaissances des enseignants

Les enseignants interrogés déclarent que les élèves éprouvent de nombreuses difficultés avec les problèmes de fonctions, en particulier lorsqu'ils passent d'une situation concrète à une forme mathématique abstraite. Ils ont souvent une vision limitée de la variable, la percevant comme une lettre fixe. Cela nuit à leur capacité à modéliser des situations et à résoudre des problèmes. Ils confondent aussi les concepts de variable et d'inconnue et rencontrent des difficultés à interpréter des graphiques. Cela complique leur compréhension de la dépendance fonctionnelle et rend les problèmes d'optimisation difficiles à aborder.
Pour améliorer la situation, les enseignants interrogés recommandent d'utiliser plus de situations concrètes et de faire attention au langage des variables et de leurs relations. L'usage de différentes représentations mathématiques doit être systématisé. Les enseignants devraient partir de situations de la vie quotidienne, en utilisant des supports variés comme des tableaux et des graphiques, et des outils numériques tels que GeoGebra. L'analyse des erreurs des élèves est nécessaire pour comprendre leurs confusions ou incompréhensions.
Ils ajoutent que les méthodes d'enseignement utilisées peuvent inclure l'approche par dépendance, l'approche graphique, et l'approche par tableaux et algèbres. De plus, l'utilisation de matériel de manipulation et d'outils numériques aide les élèves à visualiser les liens entre variables et fonctions. En ce qui concerne les erreurs, il est essentiel d'identifier leur origine et de mettre en place des méthodes de remédiation, comme des discussions et des exercices adaptés.
À différentes étapes du processus d'enseignement et apprentissage, la notion de fonction évolue : elle est intuitive au primaire, plus explicite au collège avec les variables et

correspondances, et se complexifie au lycée avec des fonctions variées. Les élèves doivent maîtriser des prérequis mathématiques de base pour progresser dans ce domaine. Les enseignants doivent adapter les ressources selon les besoins des élèves et utiliser des situations concrètes pour susciter leur intérêt.
Les enseignants guident les élèves dans la résolution de problèmes, les aidant à identifier les données importantes et à reformuler les questions. Ils encouragent la réflexion sur le processus de résolution et valorisent l'autonomie, intégrant l'erreur comme une opportunité d'apprentissage. Les principes clés incluent le développement de la métacognition et l'utilisation de questions ouvertes pour renforcer la réflexion des élèves.

Conclusion

Cette recherche met en lumière le rôle crucial des connaissances des enseignants dans le soutien et le développement des niveaux de conceptualisation des élèves en matière de résolution de problèmes mathématiques.
Les enseignants possèdent une connaissance opérationnelle du contenu et des élèves ainsi que du contenu et de l'enseignement. Ils sont capables de susciter l'intérêt situationnel, un levier crucial pour favoriser l'engagement cognitif et l'acquisition de connaissances. Toutefois, cette connaissance reste souvent superficielle. Si l'enseignant sait comment motiver, il maîtrise moins bien la mémoire didactique, concept développé par Guy Brousseau, qui permet de lier les apprentissages passés aux enjeux présents pour construire une progression cohérente. L'action didactique est souvent centrée sur la gestion immédiate de la classe plutôt que sur la dynamique à long terme des milieux d'apprentissage.
Un point fort identifié est la connaissance des programmes, des progressions et des ressources curriculaires. Les enseignants s'appuient fortement sur les manuels et les orientations pédagogiques officielles pour structurer leur enseignement. Cette conformité aux programmes assure une certaine uniformité, mais elle peut limiter l'autonomie didactique face à des situations imprévues où le savoir savant doit être transposé de manière originale.
Cette recherche souligne un manque de connaissance de la métacognition et des processus de régulation de l'apprentissage. Les enseignants interrogés rencontrent des difficultés à diagnostiquer précisément l'origine des erreurs des élèves ou de rupture dans le contrat didactique. Cette carence limite leur capacité à fournir une aide à l'étude efficace, particulièrement lors du passage critique de changement de cadre et de registre de représentation.
Les décisions des enseignants concernant la structuration du contenu, l'utilisation de représentations graphiques et les liens avec d'autres notions mathématiques ont un impact profond sur la manière dont les élèves construisent leurs connaissances. Lorsque l'enseignement privilégie l'application mécanique des règles et des techniques algébriques, la conceptualisation reste limitée. Cette approche limitée réduit des concepts complexes comme les fonctions et les problèmes d'optimisation à de simples opérations symboliques dans le registre algébrique. Cependant, les problèmes qui ont un potentiel et les stratégies pédagogiques qui valorisent les dimensions conceptuelles favorisent une compréhension plus approfondie des concepts mathématiques. Ces stratégies encouragent la mobilisation de différents registres de représentation. L'intégration

de problèmes ou de situations problématiques dans l'enseignement contribue également de manière significative à une compréhension conceptuelle plus approfondie. Ces choix axés sur les concepts permettent aux élèves d'aller au-delà de la simple maîtrise des procédures. Les élèves acquièrent une vision plus globale des notions mathématiques, notamment des fonctions et des problèmes d'optimisation.

Généralement, le profil type de l'enseignant dans cette étude est celui d'un praticien possédant une base de connaissances mathématiques générales et une bonne maîtrise des outils institutionnels, mais dont l'expertise didactique spécialisée (analyse des erreurs, gestion des obstacles, stratégies alternatives) reste à consolider pour optimiser l'apprentissage des élèves à travers la démarche de résolution de problèmes.

L'étude souligne la nécessité d'équilibrer les techniques opérationnelles et les activités de conceptualisation. Cet équilibre est crucial pour garantir un apprentissage durable et significatif de la résolution de problèmes mathématiques. L'analyse des connaissances des enseignants et du raisonnement des élèves a été déterminante pour révéler cette tension fondamentale. Il s'agit de mettre en évidence les insuffisances et les besoins spécifiques en matière de développement professionnel des enseignants concernant la résolution de problèmes mathématiques.

Dans cette perspective, l'étude souligne l'importance de consolider la formation initiale et continue des enseignants, en se concentrant sur : l'enrichissement des connaissances de base en mathématiques ; l'examen des erreurs comme outil pédagogique pour l'apprentissage l'intégration explicite de la métacognition dans les pratiques de classe ;

la conception de situations didactiques favorisant la conceptualisation et la mobilisation de différents registres de représentation.

Pour conclure, l'amélioration de la qualité de l'enseignement en matière de résolution de problèmes mathématiques requiert une approche globale des compétences professionnelles de l'enseignant. La clé d'un apprentissage durable et significatif repose sur l'interaction entre les connaissances disciplinaires, didactiques et pédagogiques. Cette méthode aide les étudiants à aller au-delà d'une perspective strictement procédurale des mathématiques pour atteindre une connaissance approfondie, réfléchie et fonctionnelle des concepts, condition essentielle pour développer une véritable compétence de résolution de problèmes.

Références bibliographiques

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a Cognitive-Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups. JSTOR

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Benjelloun, S. (2019). L'enseignement des mathématiques au Maroc : entre tradition et innovation. *Revue Marocaine de Didactique des Mathématiques*, 12(1), 45-62.

Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. ERIC

Conseil Supérieur de l'Éducation, de la Formation et de la Recherche Scientifique. (2015). Vision Stratégique de la Réforme 2015-2030.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact on students' achievement. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 147-164). Macmillan. akes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring: A New Area of Cognitive-Developmental Inquiry. American Psychologist.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-97).

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371-404). Information Age Publishing. ResearchGate (Note: This specific chapter is often cited but harder to find directly online; the ResearchGate link is for a related work on understanding.)

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second-Grade Arithmetic. JSTOR

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. American Educational Research Journal

Livingston, J. A. (1997). Metacognition: An Overview. ERIC

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics.

Ouazzani, L. (2020). Analyse des erreurs des élèves du secondaire marocain en résolution de problèmes arithmétiques. *Journal de Didactique des Mathématiques*, 7(2), 89-105.

Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Polya, G. (1957). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Remillard, J. T. (2005). Examining Key Concepts in Research on Teachers' Use of Mathematics Curricula. Review of Educational Research.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 77, 20-26.

Vergnaud, G. (1996). The nature of mathematical concepts and their development through problem solving. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), Theories of mathematical learning (pp. 5-28). Lawrence Erlbaum Associates.

Annexes:

Annexe 1 : Questionnaire des enseignants

Questions spécifiques qui guident la collecte des données sur les prédispositions des enseignants à soutenir les élèves dans le processus de résolution de problèmes

1. Comment définissez-vous la notion de fonction ? Quelles sont les différentes méthodes pour résoudre un problème exploitant cette notion de fonction ?
2. Comment faites-vous pour expliquer des concepts mathématiques à un élève imaginaire, ou de justifier des procédures relativement à la résolution de ce problème ?

Problème : Le responsable d'un parc, situé au bord d'une large rivière, veut aménager une aire de baignade surveillé de forme rectangulaire. Pour cela, il dispose d'un cordon flottant de 130 m de long (AB+BC+CD=130) et de deux bouées, notées B et C.

3. Quelles sont les difficultés récurrentes des élèves face aux problèmes impliquant les fonctions ? Comment les élèves conceptualisent-ils la notion de variable ?
4. Quelles sont les meilleures approches pour introduire la notion de fonction ? Quels types de problèmes favorisent la conceptualisation de l'algèbre ? Comment utiliser le matériel de manipulation ou les outils numériques pour soutenir l'apprentissage des élèves sur la notion de fonction ? Comment analysez-vous les erreurs d'élèves et les remédiez ?
5. Comment la notion de fonction évolue-t-elle du primaire au secondaire ? Quels sont les prérequis pour aborder un nouveau chapitre qui aborde les fonctions (au tronc commun)?
6. Comment les enseignants sélectionnent-ils et adaptent-ils les différentes ressources pour répondre aux besoins de leurs élèves ?
7. Comment les enseignants guident-ils les élèves dans le choix et l'application de stratégies de résolution d'un problème ?
8. Pourquoi les problèmes complexes sont-ils souvent mal interprétés par les élèves ?
9. Comment les enseignants encouragent-ils les élèves à réfléchir sur leur propre processus de résolution de problèmes, à planifier, à surveiller et à évaluer leur travail ?